

**1^{er} Coloquio del Departamento
de Matemáticas**

**Órbitas Periódicas en el Problema Restringido
de 3 Cuerpos**

Joaquín Delgado Fernández
Martha Álvarez Ramírez



Órbitas Periódicas en el Problema Restringido de 3 Cuerpos

Joaquín Delgado Fernández

Martha Álvarez Ramírez

Departamento de Matemáticas, UAM-I



Universidad Autónoma Metropolitana

Contenido

Introducción	vii
Capítulo 1. El problema de n cuerpos	1
1.1. Formulación general e integrales de movimiento	1
1.2. El problema de los 2 cuerpos	4
1.3. Regularización de colisiones binarias	13
Capítulo 2. El problema restringido de 3 cuerpos	15
2.1. Planteamiento del problema	15
2.2. Soluciones de equilibrio	19
2.3. El problema restringido para $\mu = 0$	20
2.4. Órbitas periódicas de primera y segunda especie	25
Apéndice A. Cálculo de órbitas de primera especie	31
Apéndice B. Cálculo de órbitas de segunda especie	35
Bibliografía	39

Introducción

En el transcurso de la historia de la Humanidad diversas culturas han interpretado y tratado de dar razones acerca del movimiento de los cuerpos. Por ejemplo, para poder medir el tiempo con los cuerpos celestes, los primeros astrónomos desarrollaron modelos empíricos en base a las regularidades observadas en el paso de los astros por el cielo. Sin embargo, fue hasta el siglo xvii, en que se dio la interpretación adecuada de las causas del movimiento. Intrigado por las leyes de la caída de los cuerpos descubierta por Galileo (1564--1642), por las leyes de Kepler, y por el movimiento de los astros, Isaac Newton (1643--1727) formuló la forma clásica de la *Ley de Gravitación Universal*, la cual explica las razones por las que los planetas siguen órbitas previsibles y calculables.

La solución del problema de 2 cuerpos llevó a Newton a la invención del Cálculo. La solución del problema de 3 cuerpos, sin embargo, probó ser insoluble. Newton afirmó sobre este problema, que su solución, *excede, si no estoy equivocado, la fuerza de cualquier mente humana*.

El problema de 2 cuerpos, por otro lado, resultó ser suficiente, cuando la influencia de otros cuerpos celestes es tratada como una perturbación, para predecir el retorno de un cometa, por ejemplo el cometa de Halley.

El estudio del problema de 3 cuerpos siguió dos enfoques distintos: el primero consistía en aproximar las soluciones y dio origen a la Mecánica Celeste. El segundo buscaba las soluciones transformando el problema original y dio origen a la Mecánica Analítica o Racional.

De forma simplificada, el objetivo de la Mecánica Celeste consiste en estudiar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias del llamado *problema de n cuerpos*, el cual consiste en describir el movimiento de n masas puntuales en el espacio euclidiano tridimensional sujetas a las leyes de gravitación newtonianas. Podríamos decir, que el problema de n cuerpos es tal vez, el problema no resuelto más antiguo y a la vez más fecundo, en la historia de la ciencia.

La búsqueda de una solución al problema de determinar la longitud geográfica por medio del movimiento de los planetas, motivó el estudio

del problema de n cuerpos y trajo consigo un enorme desarrollo de las ciencias físicas y las matemáticas. Entre otros podemos mencionar:

- Pierre Simon de Laplace investigó la estabilidad del sistema solar y publicó en 1799 su obra *Mécanique Celeste*.
- Leonhard Euler parece ser el primero en estudiar el problema general de 3 cuerpos como un problema matemático independiente de la dinámica del sistema solar. Él encontró una solución del llamado problema colineal de 3 cuerpos, en el que todas las partículas se mueven sobre una misma línea recta.
- Joseph Louis Lagrange estudió el problema de la libración de la Luna y dio un análisis de las órbitas de los satélites de Júpiter. Confirmó la solución de Euler para el problema general de 3 cuerpos y encontró una solución adicional en la que los 3 cuerpos se mueven formando un triángulo equilátero.
- Karl Friedrich Gauss desarrolló un método general para determinar órbitas basados en 3 observaciones únicamente y encontró el asteroide *Ceres* después de que había sido perdido al pasar detrás del Sol.
- Henri Jules Poincaré estudió con mucho detalle el problema de 3 cuerpos. Los métodos que introdujo para estudiar su estabilidad llevaron al desarrollo de la Topología, la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y al descubrimiento del concepto de caos.

En estas notas consideraremos el problema de los n cuerpos es abordado desde el punto de vista matemático, es decir, como el movimiento de n masas no nulas, puntuales, sometidas a la ley de la atracción universal de Newton.

Si \mathbf{x}_j es la posición del j -ésimo cuerpo respecto al centro de masa y m_j su masa, se tiene movimiento

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^n \frac{m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (0.1)$$

el cual es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que rige el movimiento de los n cuerpos.¹

A la falta de una mejor comprensión de las leyes físicas que rigen el movimiento de los astros tomaremos a (0.1) como modelo.

La idea de Poincaré sobre las órbitas periódicas como la mejor herramienta para entender el problema de 3 cuerpos [6] ha sido ampliamente explotada a lo largo de este siglo. El monumental trabajo de Elis Strömberg sobre el cálculo efectivo de las familias

¹Aquí estamos considerando que la constante de gravedad $G = 1$.

de soluciones periódicas del problema realizado con la ayuda de integradores mecánicos entre los años de 1900 y 1935 constituye la fuente más valiosa en la que se puede adquirir una idea del comportamiento cuantitativo sobre la mayor parte de éste tipo de soluciones. Por otro lado, en los años 1966 y 1970 Michel Hénon publicó una serie de artículos con el título genérico *exploración Numérica del Problema Restringido* los cuales complementan el trabajo de Strömberg e ilustran de forma cuantitativa el papel de las soluciones periódicas (estables) dentro de las soluciones acotadas. En sus exploraciones numéricas Hénon encontró de forma efectiva tres tipos de comportamientos cualitativamente distintos para las soluciones del problema restringido de 3 cuerpos: movimientos cuasi-periódicos, semi-ergódicos y de escape, de acuerdo con su nomenclatura. Una parte de los comportamientos puestos de manifiesto en sus cálculos es el que ya había quedado descrito de forma cualitativa por Poincaré.

En este trabajo se presentan las técnicas matemáticas más elementales que permiten al lector iniciarse en el estudio del problema de n cuerpos. En el Capítulo 1 iniciamos haciendo el planteamiento matemático del problema de n cuerpos, continuando con el estudio del problema de 2 cuerpos (problema de Kepler). En el Capítulo 2 planteamos y estudiamos el problema restringido de 3 cuerpos (PR3C), planteado originalmente por Euler, como una simplificación del problema plano de 3 cuerpos, el cual presenta todas las complejidades de un problema no integrable. Por último, en dos apéndices presentamos el código en *Mathematica* para calcular las órbitas periódicas de primera y segunda especie.

El problema de n cuerpos

En este capítulo, describiremos el problema de n cuerpos y veremos que las ecuaciones de movimiento del problema de n cuerpos tienen 10 integrales primeras: el vector momento lineal es constante, luego el centro de masa se mueve en una línea con velocidad constante, dando 6 integrales de movimiento; además, el momento angular (con tres componentes) y la energía. Estas constantes de movimiento permiten reducir la dimensión del espacio fase a $6n - 10$.

El problema más sencillo, único resuelto y que sirve de base a las técnicas de perturbaciones y a la mayoría de los problemas de la Astrodinámica es el problema de 2 cuerpos. Aquí mostraremos que el problema de 2 cuerpos puede ser resuelto analíticamente, ya que puede ser reducido al problema de Kepler, y sus órbitas solución son cónicas en el plano (\mathbb{R}^2).

1.1. Formulación general e integrales de movimiento

Consideremos n partículas de masa $m_i > 0$ moviéndose bajo la acción gravitatoria de Newton en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 con $n > 1$. Dar las posiciones y velocidades para todo tiempo t ; es decir caracterizar la totalidad de los posibles movimientos es lo que se conoce como el *problema de n cuerpos*.

A partir de las leyes de la dinámica de Newton, las ecuaciones de movimiento de las n partículas son n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden definidas en un abierto de \mathbb{R}^3 ; es decir, un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

Si la i -ésima partícula tiene masa $m_i > 0$ y posición $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$, aplicando la segunda ley de Newton se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1; j \neq i}^n \frac{G m_i m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

donde G es la constante de gravitación, $\dot{\cdot} = d/dt$ siendo t el tiempo y $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en \mathbb{R}^3 .

Los elementos del conjunto $\Delta_{ij} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n} : \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j \text{ para } i \neq j\}$ corresponden a la colisión de dos o más cuerpos.

Notemos que el lado derecho de la ecuación (1.1) representa la fuerza total ejercida en la i -ésima partícula por el resto de las $(n - 1)$ partículas.

Las ecuaciones de movimiento (1.1) las podemos escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= M^{-1}\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \nabla U(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (1.2)$$

donde $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ es el vector de posición, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ es el vector de momentos, esto es $\mathbf{y}_i = m_i \dot{\mathbf{x}}_i$, $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$ es la matriz de masas, y $\nabla U(\mathbf{x})$ es el vector gradiente del potencial

$$U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{Gm_i m_j}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}$$

Las ecuaciones (1.2) no están definidas en el conjunto

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}$$

es decir cuando hay alguna colisión. El dominio de definición del sistema (1.2) o *espacio fase* es $\wp = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n}\}$. Luego $\dim \wp = 6n$. El *espacio de configuración* o espacio de posiciones es $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta\}$. Las ecuaciones de movimiento del sistema (1.2) se pueden escribir como

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}_i}, \quad \dot{\mathbf{y}}_i = \sum_{i=1; i \neq j}^n \frac{Gm_i m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (1.3)$$

donde el *Hamiltoniano* es

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{y}_i\|^2}{2m_i} + U(\mathbf{x}). \quad (1.4)$$

Como H es independiente del tiempo t , las ecuaciones Hamiltonianas (1.3) son autónomas, y el sistema Hamiltoniano es llamado *conservativo*. En este caso H es una integral primera, conocida como *energía* del sistema, pues se cumple

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) = 0.$$

Los vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} son llamadas *variables conjugadas*.

El problema de n cuerpos tiene 10 constantes de movimiento, o integrales primeras independientes, las cuales nos permiten reducir la

dimensión del espacio fase a $6n - 10$. Estas integrales son: la energía H , y tres componentes del *momento lineal*

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \quad \text{con } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3;$$

las tres componentes del *centro de masas*

$$\mathbf{a}t + \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i \quad \text{con } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3;$$

y las tres componentes del *momento angular*

$$\mathbf{J} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} \quad \text{con } \mathbf{J} \in \mathbb{R}^3.$$

Ahora definimos la función *Lagrangiana*, $L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = K(\dot{\mathbf{x}}) - U(\mathbf{x})$, donde $K(\dot{\mathbf{x}})$ es la energía cinética y $U(\mathbf{x})$ la energía potencial. Notemos que $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_j} = -\frac{\partial U(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)}{\partial \dot{\mathbf{x}}_j} = 0$, es decir, el potencial depende exclusivamente de las coordenadas de posición, y no de las velocidades.

En términos de la Lagrangiana, las ecuaciones de movimiento están dadas a través de las llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

El formalismo de Euler-Lagrange es completamente equivalente a la segunda ley de Newton. Para ver esto notemos que

$$\mathbf{y}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} = m_i \dot{\mathbf{x}}_i,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i}.$$

Luego tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}_i} = 0$$

las cuales son las ecuaciones de movimiento (1.1).

La equivalencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Hamilton están dadas en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.1.1. *El sistema de las ecuaciones de Lagrange es equivalente al sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Hamilton)*

$$\dot{\mathbf{y}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i},$$

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}_i},$$

donde $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{x}}_i \mathbf{y}_i - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ es la transformada de Legendre de la función Lagrangiana vista como función de $\dot{\mathbf{x}}$.

DEMOSTRACIÓN. Ver la demostración en [3] pág. 65. \square

1.2. El problema de los 2 cuerpos

El problema de 2 cuerpos estudia el movimiento de dos partículas de masa comparable que se mueven por su mutua atracción gravitacional. Este problema puede ser reducido al llamado *Problema de Kepler*, considerando el origen de coordenadas en una de las partículas, digamos m_1 , de tal forma que la otra partícula m_2 se mueve bajo la atracción gravitatoria de m_1 . Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ los vectores de posición de 2 partículas con masa m_1 y m_2 respectivamente, relativos a un sistema de coordenadas inercial. Utilizando la Ley de Gravitación de Newton, sus ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 &= -\frac{Gm_1 m_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}|^3}, \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 &= -\frac{Gm_1 m_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}|^3} \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ y G es la constante de gravitación.

El objetivo de este problema es encontrar las soluciones $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ del sistema (1.5) para posiciones y velocidades iniciales dadas. Procederemos reduciendo este problema a uno de fuerza central, por medio de las llamadas *coordenadas relativas*. Sumando las ecuaciones de (1.5), llegamos a

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{Gm_1 m_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}|^3} = 0. \quad (1.6)$$

Por lo tanto $m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^3$, es un vector constante (principio de conservación del momento lineal), es decir

$$m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{a}. \quad (1.7)$$

Si dividimos la primera ecuación del sistema (1.5) entre m_1 , la segunda entre m_2 y restamos, obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_2 - \ddot{\mathbf{x}}_1 &= -\frac{Gm_1 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}|^3} + \frac{Gm_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}|^3} \\ &= -\frac{Gm_1 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{Gm_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}|^3} \\ &= -\frac{G(m_1 + m_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}|^3}. \end{aligned}$$

Consideremos unidades de longitud, masa y tiempo tales que, la constante de gravitación sea $G = 1$. Luego

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \quad (1.8)$$

donde $\mu = m_1 + m_2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$.

En otras palabras, hemos obtenido un problema de fuerza central en \mathbb{R}^3 conocido como el *Problema de Kepler*. Las soluciones de la ecuación (1.8) son llamadas órbitas Keplerianas.

La solución del sistema (1.8), $\mathbf{x}(t)$, para condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$ y $\dot{\mathbf{x}}(0)$ nos ayuda a determinar la segunda ecuación de (1.5), pues calculando dos integrales obtenemos $\mathbf{x}_1(t)$ y entonces $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}_1(t)$. Este procedimiento se puede interpretar mediante la reducción a coordenadas baricéntricas.

El centro de masa de dos partículas cuyas masas son m_1 y m_2 respectivamente, se define como

$$\mathbf{x}_0 = \frac{m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}.$$

Derivando dos veces esta ecuación y utilizando (1.6), obtenemos

$$\ddot{\mathbf{x}}_0 = \frac{m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{x}}_2}{m_1 + m_2} = 0.$$

Ahora, derivando la ecuación del centro de masa \mathbf{x}_0 y usando la ecuación (1.7), llegamos a

$$(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{x}}_0 = m_1\dot{\mathbf{x}}_1 + m_2\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{a}.$$

Por último, al integrar esta ecuación obtenemos

$$(m_1 + m_2)\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.9)$$

y obtenemos que el centro de masa se mueve uniformemente en una línea recta.

Sin pérdida de generalidad, fijemos el centro de masa en el origen de coordenadas, es decir

$$m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2 = 0. \quad (1.10)$$

Sumando y restando el término $m_2\mathbf{x}_1$ a la ecuación anterior, tenemos que

$$m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2 - m_2\mathbf{x}_1 = 0,$$

de donde

$$\mathbf{x}_1(m_1 + m_2) + m_2(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0.$$

Tomando en cuenta la ecuación anterior y usando la relación $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, concluimos que

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\mathbf{x}.$$

De forma similar sumamos y restamos $m_1\mathbf{x}_2$ a la ecuación (1.10), y obtenemos

$$m_1\mathbf{x}_2 + m_2\mathbf{x}_2 - m_1\mathbf{x}_2 + m_1\mathbf{x}_1 = 0,$$

de tal forma que al factorizar obtenemos

$$\mathbf{x}_2(m_1 + m_2) - m_1(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0.$$

Considerando la ecuación anterior y usando la relación $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, tenemos que

$$\mathbf{x}_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\mathbf{x}.$$

En conclusión, hemos obtenido que el movimiento de $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ será como el de $\mathbf{x}(t)$, excepto por un múltiplo escalar que depende de las masas.

Ahora estudiaremos otras constantes de movimiento del problema. Iniciemos por multiplicar escalarmente la primera ecuación de (1.5) por $\dot{\mathbf{x}}_1$ y la segunda por $\dot{\mathbf{x}}_2$, y por último las sumamos. Agrupando términos, obtenemos

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1\dot{\mathbf{x}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{x}}_2\dot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{m_1m_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}|^3}\dot{\mathbf{x}}_1 + \frac{m_1m_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}|^3}\dot{\mathbf{x}}_2$$

y finalmente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_1|\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + m_2|\dot{\mathbf{x}}_2|^2) = -\frac{m_1m_2}{|\mathbf{x}|^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2). \quad (1.11)$$

El lado derecho de la ecuación (1.11) puede escribirse como

$$-\frac{m_1m_2}{|\mathbf{x}|^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)(\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2) = \frac{d}{dt}\frac{m_1m_2}{|\mathbf{x}|}. \quad (1.12)$$

Tomando en cuenta (1.11) y (1.12) podemos concluir que la función energía total está dada por

$$h = \frac{1}{2}(m_1|\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + m_2|\dot{\mathbf{x}}_2|^2) - \frac{m_1m_2}{|\mathbf{x}|}$$

la cual, es una constante de movimiento para el sistema (1.5). Obsérvese que tanto la energía cinética, como la energía potencial están explícitas en la ecuación anterior. Además la ecuación (1.11) puede escribirse en términos de la distancia relativa, es decir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_1|\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + m_2|\dot{\mathbf{x}}_2|^2) = -\frac{m_1m_2}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}}.$$

Usando esta última ecuación, y tomando en cuenta la ecuación de movimiento para el problema de fuerza central (1.8), tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m_1 |\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + m_2 |\dot{\mathbf{x}}_2|^2) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{\mu} |\dot{\mathbf{x}}|^2 \right).$$

Generalmente se simplifica la energía multiplicándola por el término $\frac{\mu}{m_1 m_2}$. Así obtenemos la siguiente ecuación de energía del problema de Kepler.

$$h^* = \frac{\mu}{m_1 m_2} h = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|}.$$

Si consideramos a $h^* = h$, la expresión anterior queda de la siguiente manera

$$h = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{x}}|^2 - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|}. \quad (1.13)$$

1.2.1. Conservación del momento angular. Iniciemos por suponer que al tiempo $t = 0$ las partículas no están en colisión, es decir, $\mathbf{x}(0) \neq 0$. De (1.8) podemos concluir que

$$\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} (\mathbf{x} \times \mathbf{x}).$$

Ya que $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = 0$, se sigue que $\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} = 0$. Por otro lado,

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}}) + (\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}}) = 0.$$

Entonces $\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$ es un vector constante (constante de movimiento para el sistema 1.5). Esto es,

$$\mathbf{c} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}. \quad (1.14)$$

Esta última ecuación es conocida como el vector *momento angular* del problema de fuerza central. Como \mathbf{J} es un vector constante a lo largo del movimiento, en particular se tiene que $\mathbf{J} = \mathbf{x}(0) \times \dot{\mathbf{x}}(0)$, es decir, \mathbf{c} es determinado por las condiciones iniciales, y es un dato del problema.

De la ecuación (1.14) observamos que para el movimiento de fuerza central si $\mathbf{c} = 0$ se tiene que \mathbf{x} y $\dot{\mathbf{x}}$ son colineales, es decir el movimiento de m_1 y m_2 se realiza en una línea recta que pasa por el origen. Por otro lado, si $\mathbf{c} \neq 0$ sabemos que $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = 0$, entonces el movimiento tiene lugar exactamente en el plano ortogonal a \mathbf{c} que pasa por el origen en \mathbb{R}^3 . Entonces sin pérdida de generalidad podemos restringirnos a estudiar el movimiento de m_1 y m_2 en \mathbb{R}^2 .

El vector unitario $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ tiene la dirección del movimiento de la partícula m_2 y puede ser determinado para todo tiempo. Para

determinar cuando esta dirección cambia con el tiempo, vamos a derivar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{|\mathbf{x}|\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|\dot{\mathbf{x}}|}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{|\mathbf{x}|^2\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|\dot{\mathbf{x}}|\dot{|\mathbf{x}}|}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Como $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, tenemos que $|\mathbf{x}|\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}$, tal que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} - (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Por otro lado, haciendo uso de la siguiente identidad para $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u},$$

se sigue que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \frac{(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3},$$

el cual puede ser simplificado como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \times \mathbf{c}. \quad (1.15)$$

Notemos que

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \times \mathbf{c} = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^3}(\mathbf{x} \times \mathbf{c}) = -\frac{1}{\mu} \frac{\mu\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \times \mathbf{c} = \frac{\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{c}}{\mu}.$$

Ahora queremos expresar el lado derecho de (1.15) como una derivada, para lo cual usamos la ecuación de movimiento (1.8), la expresión anterior y la ecuación (1.15),

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} = \frac{\ddot{\mathbf{x}} \times \mathbf{c}}{\mu} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{c}}{\mu}.$$

Integrando ambos lados de la última ecuación llegamos a que

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{c}, \quad (1.16)$$

donde \mathbf{e} es una constante de integración llamada *vector de excentricidad* ó *vector de Laplace-Runge-Lenz*. En el caso $\mathbf{c} = 0$, $\mathbf{x}/|\mathbf{x}| = -\mathbf{e}$, y entonces \mathbf{e} está en la línea de movimiento y $|\mathbf{e}| = 1$.

Si multiplicamos (1.16) escalarmente por \mathbf{x} , obtenemos

$$\mu(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} + |\mathbf{x}|) = c^2 \quad (1.17)$$

donde $c = |\mathbf{c}|$. Para el caso $\mathbf{e} \neq 0$, definimos θ_0 al ángulo que se abre entre el vector de Laplace \mathbf{e} y el eje horizontal (x_1), definimos $f = \theta - \theta_0$, ver la Figura 1.1. Por otro lado, tenemos que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{e}| |\mathbf{x}| \cos \theta_0 = e r \cos \theta_0$, donde $r = |\mathbf{x}|$. Luego la ecuación (1.17) se puede escribir como

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + e \cos f} \quad (1.18)$$

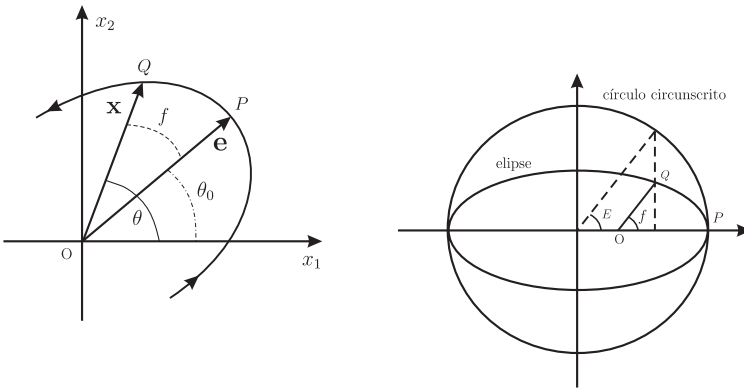


Figura 1.1. Anomalía verdadera (f), vector de Laplace (\mathbf{e}) y la anomalía excéntrica (E).

la cual es la ecuación de una cónica en coordenadas polares. Como consecuencia obtenemos que las órbitas de m_2 relativas a m_1 son cónicas con excentricidad e , y con un foco en el origen de coordenadas, ver la Figura 1.2. La distancia r del movimiento del punto Q , sobre la órbita, es mínimo cuando $\cos f = 1$, $e > 0$. El vector \mathbf{e} tiene longitud igual a la excentricidad y apunta hacia el *pericentro* (punto más próximo al foco). El punto puesto, el más lejano al foco (el cual, obviamente existe sólo para órbitas cerradas) es llamado el *apocentro* y el ángulo f es llamado *anomalía verdadera*. El pericentro y apocentro son llamados *ápsides* y la línea que los une es llamada *línea ápsidal*. En los ápsides, se cumple $\dot{r} = 0$, la velocidad es ortogonal al radio vector. Además, en el movimiento elíptico no perturbado, la anomalía excéntrica E es el ángulo medido en el plano de la elipse, desde el pericentro al punto de intersección del círculo circunscrito con la vertical, al eje mayor, que pasa por el cuerpo que describe la órbita, ver la Figura 1.1.

De la teoría de secciones cónicas podemos clasificar las órbitas Keplerianas:

- $e = 0$ la curva es una circunferencia
- $0 < e < 1$ la curva es una elipse
- $e = 1$ la curva es una parábola
- $e > 1$ la curva es una hipérbola.

Podemos encontrar una relación entre las constantes c , e y h a partir de la ecuación (1.16)

$$\mu \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{c},$$

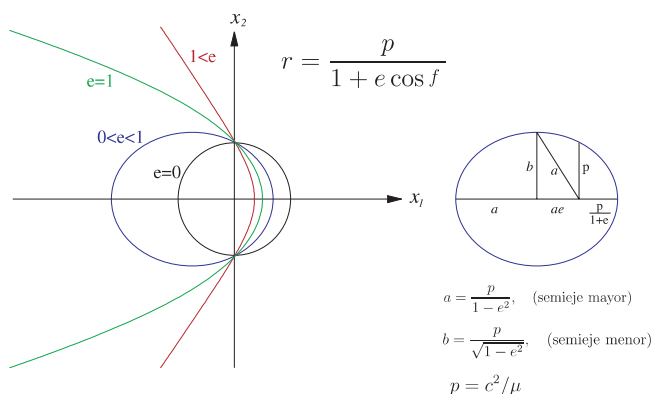


Figura 1.2. Órbitas Keplerianas.

elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación y usamos el hecho de que $\dot{\mathbf{x}}$ y \mathbf{c} son ortogonales ($\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{c} \neq 0$), concluimos que

$$\mu^2 \left(1 + e^2 + \frac{2}{|\mathbf{x}|} \mathbf{e} \cdot \mathbf{x} \right) = |\dot{\mathbf{x}}|^2 c^2.$$

Ahora sustituimos $|\dot{\mathbf{x}}|^2$ de la ecuación de la energía (1.13) y $\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}$ de (1.17),

$$\mu^2(e^2 - 1) = 2hc^2 \quad (1.19)$$

la cual es llamada *ecuación fundamental*. Despejando h de esta ecuación obtenemos

$$h = \frac{\mu^2}{2c^2}(e^2 - 1).$$

Luego, si conocemos la excentricidad (e) de la órbita podemos conocer el valor de la energía (h). Mediante un cálculo sencillo tenemos la siguiente tabla:

excentricidad	energía	órbita
$e = 0$	$h = -\mu^2/2 J ^2$	Circunferencia
$0 < e < 1$	$h < 0$	Elipse
$e = 1$	$h = 0$	Parábola
$e > 1$	$h > 0$	Hipérbola

En la Figura 1.3 ilustramos el *conjunto de bifurcación* Σ en el plano de parámetros (h, c) , energía y momento angular. Éste consiste en la curva $h = -\mu^2/2c^2$ y dos ejes coordenados $c = 0$ y $h = 0$. En los puntos de Σ la topología de la región de los posibles movimientos $B_{c,h}$ cambia.

Notemos que $\mathbf{c} = \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{x} = 0$ implica que los vectores de posición y velocidad son colineales, y por lo tanto las cónicas se deforman

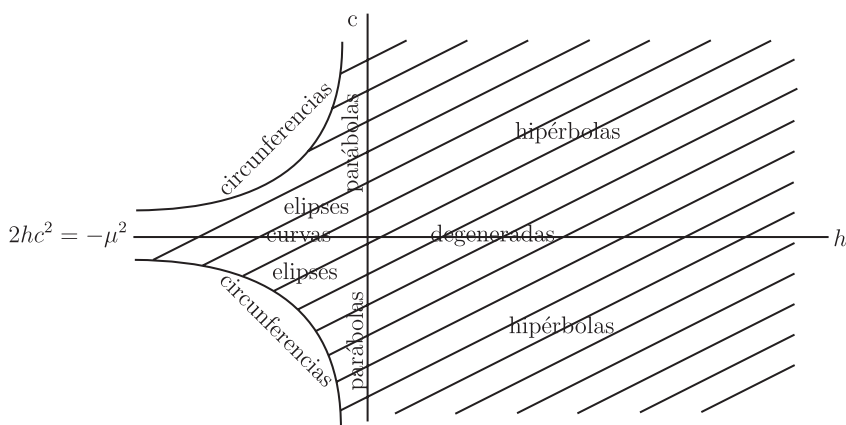


Figura 1.3. Espacio energía-momento angular

(degeneran) en líneas rectas, de tal forma que el movimiento de m_1 y m_2 es colineal.

1.2.2. Estudio del problema reducido. Como hemos visto el problema Kepleriano de 2 cuerpos está definido por la ecuación diferencial (1.8)

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \quad U = U(\mathbf{x}) = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}$$

cuyas soluciones son secciones cónicas.

Ya que el movimiento de una partícula en un campo de fuerza central se realiza en el plano, es natural introducir coordenadas polares $r = |\mathbf{x}|$, θ . Sean \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_θ los vectores unitarios en la dirección radial y perpendicular al plano de movimiento, respectivamente. Entonces los vectores de posición, velocidad y aceleración pueden ser escritos en coordenadas polares como

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= r\mathbf{e}_r, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \\ \ddot{\mathbf{x}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right)\mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos la expresión de \dot{r} en la ecuación de momento angular, $\mathbf{c} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$, obteniendo $\mathbf{c} = r^2\dot{\theta}\mathbf{u}$, donde \mathbf{u} es un vector unitario perpendicular al plano que contiene a \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_θ . Luego

$$c = r^2\dot{\theta}.$$

Por otro lado, tenemos que dado que la ecuación (1.8) define un campo de fuerza central se cumple

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right)\mathbf{e}_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r.$$

Luego la ecuación de movimiento en coordenadas polares toma la forma

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Usando la relación $\dot{\theta} = c/r^2$ donde c es una constante independiente de t , la cual es determinada por las condiciones iniciales, tenemos

$$\ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} + r\frac{c^2}{r^4} \quad \text{ó} \quad \ddot{r} = -\frac{\partial W}{\partial r}$$

donde $W = W(r) = \frac{c^2}{2r^2} + U = \frac{c^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}$ es llamada *energía potencial efectiva* o *potencial efectivo*, $W = U_{efec}$.

OBSERVACIÓN 1.2.1. La energía total del problema en dimensión uno viene dada por

$$h_1 = \frac{\dot{r}^2}{2} + W(r) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} \quad (1.20)$$

y es la misma que la energía total del problema original

$$h = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + U(\mathbf{x})$$

ya que

$$\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\dot{r}^2\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2}.$$

OBSERVACIÓN 1.2.2. Haciendo abuso de la notación, a partir de aquí denotaremos por $h = h_1$. Luego, con esta notación la ecuación de la energía total es

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{c^2}{r^2}\right) = \frac{\mu}{r} + h$$

de donde

$$\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} \leq \frac{\mu}{r} + h.$$

Multiplicando esta última ecuación por $r = |\mathbf{x}|^2$ tenemos

$$\frac{1}{2}c^2 \leq \mu r + hr^2.$$

Como consecuencia vemos que si $r \rightarrow 0$, entonces $c = 0$. Análogamente, en el problema de n cuerpos, todos los cuerpos no pueden colisionar simultáneamente al menos que el momento angular sea 0.

OBSERVACIÓN 1.2.3. Por otro lado, si la ecuación de la energía (1.20) la multiplicamos por r tenemos

$$\dot{r}^2 r + \frac{c^2}{r} = 2\mu + 2hr$$

y en particular si $c = 0$ se cumple que

$$\dot{r}^2 r \leq 2\mu + 2hr$$

Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \dot{r}^2 r \leq \lim_{r \rightarrow 0} (2\mu + 2hr) = 2\mu.$$

Esto significa que a pesar de que $\dot{r} \rightarrow \infty$ como lo indica la ecuación (1.20), para $c = 0$ la cantidad $\dot{r}^2 r$ se conserva acotada en colisión.

Por otro lado, tenemos que el problema de Kepler es un sistema conservativo, y como consecuencia la energía total del sistema se conserva. En particular en el problema de dimensión uno, la dependencia de r con respecto a t está definida por la cuadratura

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{2(h - W(r))}}.$$

Como $\dot{\theta} = \frac{c^2}{r^2}$ y $\frac{d\theta}{dt} = \frac{c^2/r^2}{\sqrt{2(h - W(r))}}$, podemos encontrar la ecuación de la órbita en coordenadas polares mediante la cuadratura,

$$\theta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{(c/r^2)dr}{\sqrt{2(h - W(r))}}. \quad (1.21)$$

1.3. Regularización de colisiones binarias

La ecuación (1.8) tiene una singularidad cuando $\mathbf{x} = 0$ la cual corresponde a colisión. Notemos que cuando $\mathbf{x} \rightarrow 0$ el potencial $U = -\mu|\mathbf{x}|^{-1} \rightarrow \infty$. Sea $t = t^*$ el tiempo en que ocurre la colisión. Una solución $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ de (1.8) es llamada *órbita de colisión* si $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ y $\dot{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t^*$. Si el intervalo máximo de definición de la solución $x(t)$ es $[t_1, t^*)$ con $t^* < \infty$, decimos que la solución tiene una singularidad en $t = t^*$.

Cuando las singularidades de las ecuaciones de movimiento (1.1), debidas a colisión doble o triple no son esenciales, y pueden ser removidas bajo un cambio adecuado de variable tanto en las variables de posición y velocidad como del tiempo, las cuales se expresan en forma paramétrica en términos de una nueva variable, este proceso se llama *regularización de colisión*.

El problema restringido de 3 cuerpos

El problema restringido de 3 cuerpos (PR3C), planteado originalmente por Euler, es una simplificación del problema plano de 3 cuerpos el cual que presenta todas las complejidades de un problema no integrable.

En los años setentas, la búsqueda de órbitas periódicas estuvo motivada por las misiones espaciales Géminis y Apolo. En época reciente la misión espacial Genesis Discovery Mission, lanzada por la NASA desde la Tierra el 8 de agosto del 2001 y que volvió a la Tierra en septiembre del 2004 tuvo una trayectoria periódica situada aproximadamente a un millón y medio de kilómetros de la Tierra.

2.1. Planteamiento del problema

Consideremos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 (llamados *primarios*) los cuales se mueven en órbitas circulares bajo su acción gravitatoria, con el plano de movimiento fijo respecto a un sistema de referencia inercial. Un tercer cuerpo de masa despreciable, $m_3 \approx 0$, a la que llamaremos *asteroide*, se mueve en el plano de movimiento, bajo la atracción de los primarios. El problema consiste en determinar el movimiento del cuerpo m_3 en estas condiciones.

Para describir el movimiento se usan los sistemas de coordenadas *sideral* (fijo) y el *sinódico* (rotatorio). El sistema rotatorio gira con una velocidad angular positiva ω respecto al sideral.

Notación

- i) $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ posiciones de los primarios en el *sistema fijo*
- ii) (X, Y) posición de $m_3 \approx 0$ en el *en el sistema fijo*
- iii) (ξ, η) posición de $m_3 \approx 0$ en variables adimensionales en el *sistema fijo*
- iv) (x, y) posición de $m_3 \approx 0$ en variables adimensionales en el *sistema rotatorio*

Sean m_1, m_2 las masas de los primarios y m_3 la masa del tercer cuerpos que se supone positiva pero pequeña; eventualmente

tomaremos $m_3 = 0$. Las ecuaciones de movimiento de m_3 en el sistema fijo son:

$$m_3 \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{km_1 m_3 (X - X_1)}{R_1^3} - \frac{km_2 m_3 (X - X_2)}{R_2^3},$$

$$m_3 \frac{d^2 Y}{dt^2} = -\frac{km_1 m_3 (Y - Y_1)}{R_1^3} - \frac{km_2 m_3 (Y - Y_2)}{R_2^3},$$

donde

$$R_1^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2, \quad R_2^2 = (X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2$$

Para simplificar, dividimos entre m_3 , y posteriormente hacemos $m_3 \rightarrow 0$ y obtenemos

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{km_1 (X - X_1)}{R_1^3} - \frac{km_2 (X - X_2)}{R_2^3},$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -\frac{km_1 (Y - Y_1)}{R_1^3} - \frac{km_2 (Y - Y_2)}{R_2^3},$$

donde X_1 y X_2 son las soluciones al problema de 2 cuerpos en movimiento circular, es decir,

$$X_1 = -b \cos \omega t, \quad X_2 = a \cos \omega t,$$

$$Y_1 = -b \sin \omega t, \quad X_2 = a \sin \omega t.$$

Aquí $l = a + b$ es la separación entre los primarios y bajo el supuesto de que el centro de masa está en el origen. Luego $m_1 b = m_2 a$. Si se introducen las variables adimensionales

$$\xi = \frac{X}{l}, \quad \eta = \frac{Y}{l},$$

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \tau = \omega t,$$

$$\rho_1 = \frac{R_1}{l}, \quad \rho_2 = \frac{R_2}{l},$$

entonces las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = -\left(\frac{\mu_1 (\xi + \mu_2 \cos \tau)}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2 (\xi - \mu_1 \cos \tau)}{\rho_2^3} \right),$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\tau^2} = -\left(\frac{\mu_1 (\eta + \mu_2 \sin \tau)}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2 (\eta - \mu_1 \sin \tau)}{\rho_2^3} \right).$$

En el caso del sistema Tierra-Sol-Luna se dispone de los datos siguientes [11]:

$$m_1 = 1.99 \times 10^{30} \text{ Kg. masa del Sol}$$

$$m_2 = 5.98 \times 10^{24} \text{ Kg. masa de la Tierra}$$

$$l = 1.496 \times 10^8 \text{ Kg. distancia media Tierra-Sol}$$

$$d = 3.844 \times 10^5 \text{ Kg. distancia media Tierra-Luna}$$

$$\omega_T = 1.720242 \times 10^{-7} \text{ rad/seg velocidad angular media de la Tierra alrededor del Sol}$$

A partir de estos datos obtenemos

$$\mu_1 = 9.999969 \times 10^{-1}, \quad \mu_2 = 3.00493 \times 10^{-6}.$$

Además podemos estimar la razón de la distancia Tierra-Luna a la distancia Tierra-Sol

$$\bar{\rho}_2 = \frac{d}{l} = 2.56951 \times 10^{-3}.$$

Estos órdenes de magnitud tan pequeños hacen inadecuado el modelo del problema restringido para describir el movimiento de la Luna y fué lo que motivo al matemático G.W. Hill (1878) a proponer su célebre Teoría Lunar [1].

En las variables adimensionales, el sistema rotatorio gira con velocidad angular 1, el primario de masa $\mu := \mu_2$ está en $(1 - \mu, 0)$ y el de la masa $1 - \mu$ en $(-\mu, 0)$; además la dependencia explícita del tiempo se elimina, ver la Figura 2.1. En lo que sigue continuaremos denotando la variable independiente por t y la derivada respecto a t por un punto, $\cdot = d/dt$. Es sistema transformado tiene entonces la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = -\left(\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(x+\mu)}{r_2^3}\right), \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -\left(\frac{(1-\mu)y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3}\right), \quad (2.2)$$

donde $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y\mu^2$ y $r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y\mu^2$, ó en notación compleja, haciendo $z = x + iy$

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} - z = -\mu\frac{z-1+\mu}{r_2^3} - (1-\mu)\frac{z+\mu}{r_1^3}. \quad (2.3)$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ \dot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.4)$$

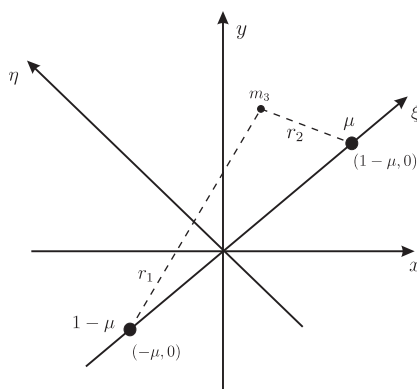


Figura 2.1. Sistemas de referencia fijo y rotatorio.

o en forma Lagrangiana

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x}, \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $\Omega(x, y) = (1 - \mu) \left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{r_1} \right) + \mu \left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{1}{r_2} \right)$, y L es la función de Lagrange

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x\dot{y} - y\dot{x} + \Omega(x, y).$$

El sistema (2.5) se puede reescribir también en la forma Hamiltoniana mediante el procedimiento usual de la transformada de Legendre [1], si definimos los momentos por

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - x,$$

y la función Hamiltoniana

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L(x, y),$$

de tal forma que al omitir el término constante $\mu(\mu - 1)$ en el Hamiltoniano, toma la forma

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}.$$

La integral de movimiento $C = \mu(\mu - 1) - 2H$ se conoce como la *integral de Jacobi*. La conservación de la constante de Jacobi puede

escribirse también a partir de las ecuaciones (2.4) como

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \Omega - \frac{C}{2}. \quad (2.6)$$

Cada valor constante de C determina las regiones que son accesibles al movimiento en el espacio xy , denominadas *regiones de Hill*. A partir de la relación (2.6) podemos ver que éstas vienen dadas por la desigualdad

$$\Omega(x, y) \geq \frac{C}{2}.$$

La frontera $\Omega(x, y) = \frac{C}{2}$ se denomina la *curva de velocidad cero* y puede darse una primera descripción cualitativa del movimiento, si determinamos las curvas de velocidad cero para cada nivel $C = \text{const.}$ y cada valor de μ .

El caso $\mu = 0$ en (2.3) es el problema de 2 cuerpos desde un sistema rotatorio con centro en uno de los primarios y se conoce como el *problema de Kepler giratorio*. Posteriormente haremos una descripción más detallada de este caso.

2.2. Soluciones de equilibrio

Ya que el problema restringido circular de 3 cuerpos no es integrable, no podemos conocer las soluciones explícitamente, con lo cual nos daremos a la tarea de buscar soluciones particulares. Estas pueden ser encontradas como puntos donde m_3 tiene velocidad y aceleración cero en el sistema rotatorio. Tales puntos son llamados *puntos de equilibrio* del sistema (2.4). Notemos que éstos son las soluciones de equilibrio en el sistema sinódico y corresponden a soluciones periódicas en el sistema sideral. A partir de ahora supondremos que todos los movimiento están confinados al plano xy .

Los puntos críticos (x, y, \dot{x}, \dot{y}) del sistema (2.5) satisfacen $\dot{x} = \dot{y} = 0$, y de acuerdo a (2.6) se proyectan sobre puntos sobre la curva de velocidad cero; además son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0,$$

por lo tanto corresponden a puntos críticos sobre el nivel $\Omega = C/2$. En forma explícita,

$$(1 - \mu) \left[r_1 - \frac{1}{r_1^2} \right] \frac{x + \mu}{r_1} + \mu \left[r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right] \frac{x - 1 + \mu}{r_2} = 0, \quad (2.7)$$

$$(1 - \mu) \left[r_1 - \frac{1}{r_1^2} \right] \frac{y}{r_1} + \mu \left[r_2 - \frac{1}{r_2^2} \right] \frac{y}{r_2} = 0. \quad (2.8)$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos los siguientes casos:

- Existen tres soluciones con $y = 0$ (llamadas *soluciones colineales* o de Euler). La ecuación (2.8) se anula, mientras que la ecuación (2.7) se reduce a

$$(1 - \mu) \left[\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right] \frac{x + \mu}{\rho_1} + \mu \left[\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right] \frac{x - 1 + \mu}{\rho_2} = 0$$

donde $\rho_1 = |x + \mu|$. Luego existen tres posibles casos: (i) $x < -\mu$, (ii) $4 - \mu < x < 1 - \mu$ y (iii) $1 - \mu < x$.

Veamos el primer caso, $x < -\mu$. Ya que $\rho_1 = -x - \mu$, $\rho_2 = -1 - \mu - x$ y por lo tanto $\rho_2 = 1 + \rho_1$. Finalmente se obtiene la ecuación quintica (quinto grado) de Euler en $\rho := \rho_2$ dada por

$$-\rho^5 + (2 + \mu)\rho^4 - (1 + 2\mu)\rho^4 - (1 + 2\mu)\rho^3 - (1 - \mu)\rho^2 + 2(1 - \mu)\rho - (1 - \mu) = 0.$$

Usando la regla de los signos, podemos ver que existe sólo una raíz positiva si $\mu < 1/2$. Esta solución se denota por L_1 . Haciendo un análisis similar en los casos (ii) y (iii) existen soluciones únicas, las cuales se denotan por L_2 y L_3 .

- Para $y \neq 0$, las ecuaciones (2.7) y (2.8) tienen dos soluciones $r_1 = r_2 = 1$: $x = 1/2 - \mu$, $y = \pm\sqrt{3}/2$. Estas son las soluciones de Lagrange L_4 , y L_5 , y forman configuraciones triangulares equiláteras respecto de los primarios, ver la Figura 2.2.

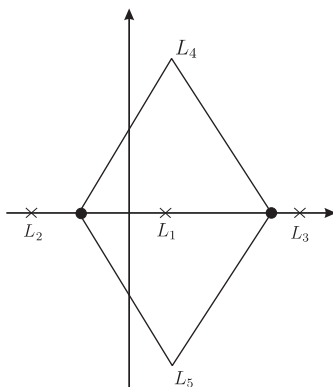


Figura 2.2. Puntos de Lagrange: colineales y triangulares.

2.3. El problema restringido para $\mu = 0$

Para $\mu \approx 0$ conviene escribir las ecuaciones de movimiento (2.3) en la forma

$$\ddot{z} + 2i\dot{z} - z + \frac{z}{|z|^3} = \mu f(z, \bar{z}, \mu), \quad (2.9)$$

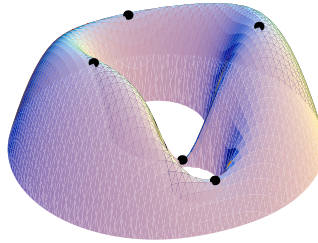


Figura 2.3. Superficie tridimensional definida por $C = 2U$ y localización de los puntos de equilibrio para $\mu_2 = 0.2$.

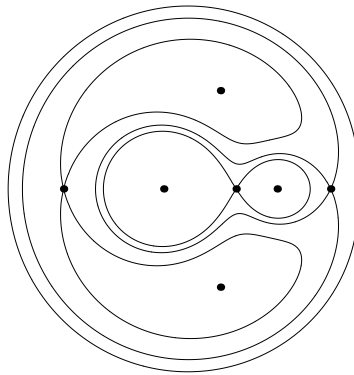


Figura 2.4. Localización de los puntos de equilibrio para $\mu_2 = 0.2$.

y la constante de Jacobi para $\mu = 0$ como

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{r} - \frac{C}{2}, \quad (2.10)$$

donde $r = r_1$. Estamos interesados en encontrar órbitas periódicas para $\mu = 0$, las cuales persisten o pueden ser “continuadas” para valores $\mu \approx 0$. Las órbitas elípticas y en particular las circulares, son los movimientos de interés a estudiar en el caso $\mu = 0$.

Las órbitas que se continúan a partir de las órbitas circulares se denominan *órbitas de primera especie* y las generadas a partir de órbitas elípticas se denominan de *segunda especie*. Más adelante veremos las

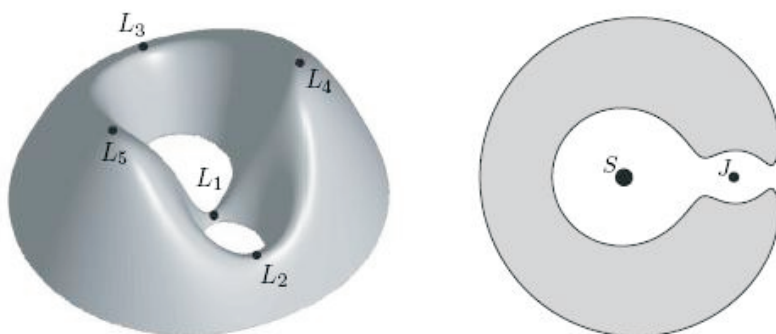


Figura 2.5. Superficie $C = 2U$ con los puntos de Lagrange y región de Hill cuando los primarios son el Sol (S) y Júpiter (J), con $C_3 < C < C_1$.

condiciones que deben satisfacer los elementos de las órbitas para que la continuación sea posible.

Notemos que para $\mu = 0$ el primario situado en el punto con coordenadas $(1, 0)$ tiene masa nula, y lo llamaremos *planetoide*. Por otro lado, debemos observar que formalmente debemos evitar pasar por ese punto pues para $\mu \approx 0$ la órbita a continuarse puede pasar por colisión doble. Si la órbita del asteroide tiene radio menor que 1 diremos que es *inferior* al planetoide y en caso contrario diremos que es *superior*.

En las siguientes dos secciones vamos a dar una descripción breve de las soluciones acotadas en el sistema sideral y sinódico.

2.3.1. Descripción desde el sistema sideral. En el capítulo anterior vimos que en el sistema sideral la órbita es una cónica que en coordenadas polares (r, θ) se escribe como

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

donde e es la excentricidad, a es el semieje mayor y $f = \theta - \theta_0$, donde θ_0 es el argumento del perieje.

Sea E la anomalía excéntrica (ver la Figura 1.1). Entonces

$$r = a(1 + e \cos E),$$

$$M = E - e \sin E \quad (\text{ecuación de Kepler}),$$

y la conservación de la energía puede expresarse como

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = \frac{1}{r} + h. \quad (2.11)$$

Se puede demostrar que en el caso de la energía negativa, ésta depende sólo del semieje mayor de la elipse: $h = -1/2a$. La integral de momento angular

$$r^2 \dot{\theta} = M_{\text{sid}} = \text{const.}$$

y la energía están relacionadas por la ecuación

$$2hM_{\text{sid}}^2 = e^2 - 1.$$

2.3.2. Descripción desde el sistema rotatorio. En el sistema rotatorio el movimiento acotado, en general se ve como la combinación del movimiento elíptico junto con una precesión del perieje.

La ecuación para las regiones de Hill en coordenadas polares, de acuerdo a (2.10), se reduce a

$$p(r) := r(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = r^3 - Cr + 2 \geq 0,$$

por lo tanto las regiones tienen simetría radial.

Por la regla de los signos, si $C \geq 0$ no existen raíces para $p(r)$. Si $C > 0$ entonces existe una raíz positiva o ninguna. Un análisis más detallado muestra que para $C = 3$ se tiene una raíz de multiplicidad dos. Por lo tanto, si $0 < C < 3$ no existen raíces reales y la región de Hill es todo el plano. Si $C > 3$ existen dos raíces positivas $s_1 \leq s_2$ y en tal caso las regiones de Hill consisten de un disco de radio s_1 y el exterior del disco de radio s_2 . Cuando $C = 3$ las dos componentes se interceptan en la circunferencia de radio $s = 1$ de puntos críticos, ver la Figura 2.6. Esta circunferencia pasa precisamente por la posición límite de asteroide localizado en $(1, 0)$.

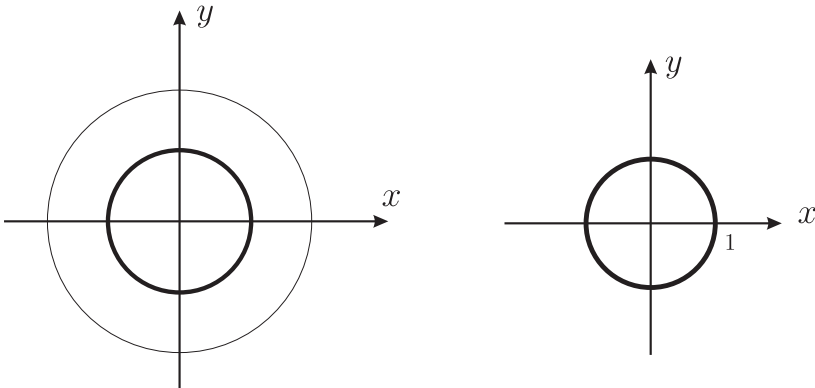


Figura 2.6. Regiones de Hill para $\mu = 0$ en el sistema sinódico.

Ahora, busquemos soluciones circulares de la forma $z = ae^{i\beta t}$, $\beta \neq 0$. Sustituyendo en (2.9) con $\mu = 0$ vemos que debe satisfacerse la

condición

$$(\beta + 1)^2 a^3 = 1, \quad \beta \neq 0. \quad (2.12)$$

El primario de masa $\mu = 0$ está localizado en $(1, 0)$, luego si hemos de evitar que la órbita pase cerca o posiblemente por colisión para $\mu \approx 0$ debemos suponer que

$$(\beta + 1)^2 \neq 1, \quad \text{o sea } \beta \neq 0, -2. \quad (2.13)$$

Sustituyendo la solución en la relación de Jacobi (2.10) y usando (2.12), vemos que

$$C = \frac{1}{a} \pm 2a^{1/2}. \quad (2.14)$$

A partir de la gráfica de C vs a , concluimos que existen 1, 2 ó 3 órbitas circulares para un valor fijo de C , ver Figura 2.7. Notemos que el mínimo de la rama superior se alcanza en $a = 1$.

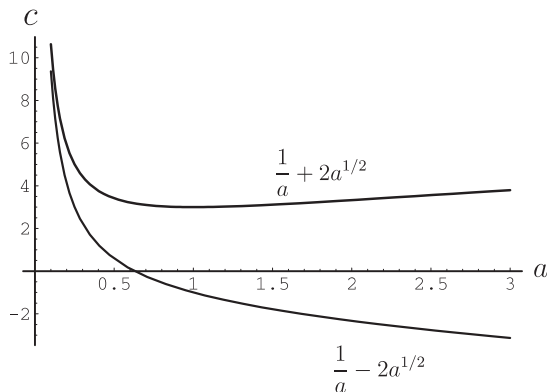


Figura 2.7. Gráfica de a vs C .

En el sistema sidereal, para cada nivel de energía existen dos órbitas circulares que difieren sólo en el signo del momento angular M_{sid} , mientras que para un nivel fijo de la constante de Jacobi C , puede haber hasta tres órbitas circulares. Esta aparente paradoja se explica como sigue: ambos sistemas difieren en la rotación de coordenadas uniforme en el tiempo, pero ésta preserva longitudes y velocidades, entonces

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad \text{y} \quad r = \xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2, \quad (2.15)$$

luego de las relaciones (2.10) y (2.11) encontramos que $h = M_{\text{sid}} = -C/2$, ó bien

$$M_{\text{sid}} = -\frac{C}{2} - \frac{1}{2a}.$$

Entonces para cada rama de (2.14) tenemos

$$M_{\text{sid}} = \begin{cases} a^{1/2} > 0, & \text{para la rama } a^{-1} + 2a^{1/2}, \\ -a^{1/2} < 0, & \text{para la rama } a^{-1} - 2a^{1/2}. \end{cases}$$

Como consecuencia de que el sistema sinódico gira con una velocidad angular positiva unitaria, el momento angular en los sistemas sinódico y sideral están relacionados por

$$M_{\text{sin}} = M_{\text{sid}} - r^2. \quad (2.16)$$

Como consecuencia se sigue que una órbita que es retrógrada en el sistema sideral también es retrógrada en el sistema sinódico. Pero por otro lado, una órbita directa en el sistema sideral puede ser directa o retrógrada en el sistema sinódico. Para una órbita circular $r = a$, y de acuerdo a (2.16) obtenemos

$$M_{\text{sin}} = M_{\text{sid}} - a^2 = a^{1/2}(\pm 1 - a^{3/2}), \quad \text{donde } \pm 1 \text{ es el signo de } M_{\text{sid}}$$

y por lo tanto, si $a < 1$ y $M_{\text{sid}} > 0$ entonces $M_{\text{sin}} > 0$; mientras que si $a > 1$ y $M_{\text{sid}} > 0$ entonces $M_{\text{sin}} < 0$. Esto significa que la rama inferior en la Figura NO corresponde a órbitas circulares retrógradas en ambos sistemas, mientras que la rama superior corresponde a órbitas directas en el sistema sideral que, en el sistema sinódico son directas si su radio es menor que 1 o retrógradas si su radio es mayor que 1.

2.4. Órbitas periódicas de primera y segunda especie

Las órbitas de primera especie son las que se obtienen como "continuación analítica" de las órbitas circulares en el problema de Kepler giratorio. Las órbitas de segunda especie son las que se obtienen por continuación de órbitas elípticas.

Una de las ventajas del problema de 3 cuerpos es que es un sistema Hamiltoniano, y podemos buscar un sistema de coordenadas o variables llamadas *variables acción-ángulo* en las que el sistema para $\mu = 0$ sea fácilmente integrable.

2.4.1. El caso circular. Las ecuaciones de variación del sistema (2.9) alrededor de una órbita circular $z = ae^{i\beta t}$ son

$$\ddot{\zeta} + 2i\beta\dot{\zeta} - \zeta = \frac{1}{2}(\beta + 1)^2(\zeta + 3e^{2i\beta t}\bar{\zeta}) \quad (2.17)$$

en donde hemos usado la relación (2.12). El cambio de variable $\zeta \rightarrow ue^{i\beta t}$ transforma (2.17) en una ecuación lineal con coeficientes

constantes¹

$$\ddot{u} + 2i\beta\dot{u} - u = \frac{1}{2}(\beta + 1)^2(u + 3\bar{u}).$$

Un cálculo directo muestra que los multiplicadores característicos son: 1 con multiplicidad doble y $e^{\pm 2\pi i/\beta}$. Tomando en cuenta las restricciones (2.12) y (2.13) obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.4.1. *Sea $z = ae^{i\beta t}$ una órbita circular del problema de Kepler giratorio. Sea C_0 la constante de Jacobi correspondiente. Si $\beta \neq 0, -1, -2$ y se da la condición de no resonancia $\beta^{-1} \notin \mathbb{Z}$, entonces existe una familia de órbitas periódicas para μ suficientemente pequeña y para valores de la constante de Jacobi C suficientemente cercanos a C_0 .*

Las órbitas de primera especie son periódicas solamente en el sistema sinódico, pero en general no son curvas cerradas en el sistema sideral. Para el caso $\mu = 0$ la órbita circular en el sistema sinódico tiene la frecuencia angular (movimiento medio) $n = \beta + 1$, así que la condición de no resonancia equivale a pedir que

$$\frac{1}{n-1} \notin \mathbb{Z}. \quad (2.18)$$

Si $n < 0$, es decir si la órbita es retrógrada en el sistema sideral (y por lo tanto retrógrada en el sistema sinódico) entonces el cociente en (2.18) está entre -1 y 0 , por lo que la condición de no resonancia se satisface automáticamente. Para órbitas directas en el sistema sideral $n > 0$, existen dos casos: (a) $n < 1$ de donde $a > 1$ y por lo tanto la órbita del asteroide es exterior al planetoide. La condición de no resonancia en este caso es equivalente a

$$n \neq \frac{k+1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

mientras que en el caso (b) $1 < n$, y por lo tanto $a < 1$, lo cual significa que la órbita es interior al planetoide. La condición de no resonancia se puede escribir como

$$n \neq \frac{k-1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

y sólo en estos casos es posible la continuación analítica.

¹El teorema de Floquet afirma que para un sistema lineal con coeficientes periódicos existe un cambio lineal de coordenadas con coeficientes periódicos que transforma el sistema en uno con coeficientes constantes. Aquí se exhibe explícitamente este cambio de coordenadas.

2.4.2. El caso elíptico. Para $\mu = 0$ el sistema (2.9) tiene las integrales primeras de Jacobi y de momento angular (en el sistema rotatorio), $M_{\text{sid}} = r^2(\dot{\theta} + 1)$ (que son independientes en el caso elíptico) implica que tres multiplicadores característicos son iguales a 1^2 .

Para las órbitas circulares los gradientes de M_{sid} y la integral de Jacobi son dependientes. Esta afirmación puede verse si usamos coordenadas polares

$$\begin{aligned} M_{\text{sid}} &= r^2(\dot{\theta} + 1), \\ -C &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - r^2 - 2/r, \end{aligned}$$

y calculamos el rango de la matriz de derivadas parciales

$$\begin{pmatrix} 2r(\dot{\theta} + 1) & 0 & 0 & r^2 \\ 2r\dot{\theta}^2 - 2r + 2/r & 0 & 2\dot{r} & 2r^2\dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Si $\dot{r} \neq 0$ los gradientes son independientes. En cambio los gradientes son dependientes si y sólo si $r = a$, $\dot{\theta} = \beta$ son constantes y además

$$\alpha\beta^2 - a + \frac{1}{a^2} = 2a\beta(\beta + 1)$$

que después de simplificar toma la forma

$$(\beta + 1)a^3 = 1,$$

la cual es la relación entre la frecuencia y el radio de una órbita circular en el sistema sinódico, (2.12).

Para salvar esta situación introduciremos una serie de cambios canónicos de coordenadas. Estas coordenadas tienen la ventaja de que permiten resolver explícitamente el problema de Kepler tanto en el sistema sidereal como sinódico. Por simplicidad interpretaremos estas coordenadas en el sistema sidereal, ver la Figura 3.

Sea $l = M$ la anomalía media, $g = \omega$ el argumento del perieje, $L = a^{1/2}$, la raíz cuadrada del semieje mayor y G el momento angular. Se puede demostrar que el conjunto de variables (l, g, L, G) es *canónico* en el sentido de que la 2--forma simpléctica canónica [1] queda invariante, es decir

$$dp_{\xi} \wedge d\xi + dp_{\eta} \wedge d\eta = dL \wedge dl + dG \wedge dg.$$

Esta propiedad implica en particular que basta transformar el Hamiltoniano del problema de Kepler en el sistema sidereal -- ver la relación (2.11) --,

$$K_0 = \frac{1}{2}(dp_{\xi}^2 + dp_{\eta}^2) - \frac{1}{r}, \quad \text{donde} \quad dp_{\xi} = \dot{\xi}, \quad dp_{\eta} = \dot{\eta}$$

²En este caso el polinomio característico de la matriz de monodromía es una función par.

a las nuevas coordenadas para obtener las ecuaciones de movimiento. Ya que la energía satisface $h = -1/2a$ entonces se cumple

$$K_0 = -\frac{1}{2L^2}.$$

Las coordenadas (l, g, L, G) se conocen como las *variables de Delaunay*. Las coordenadas l y g son angulares mientras que las coordenadas de acción L y G están restringidas por la relación $0 \leq |G| < L$. Si $G = 0$ se tiene que las órbitas colineales tienen momento angular cero, y si $G = \pm L$ se tiene que las órbitas son circulares directas y retrógradas respectivamente, aunque el argumento del pericentro g no está definido para este tipo de órbitas. Es por ello que este conjunto de variables no son adecuadas para describir órbitas circulares o de excentricidad pequeña.

Notemos que tanto L como G son integrales primeras para el sistema Hamiltoniano K_0 y las ecuaciones $L = h$, $G = c$, constantes, definen un toro invariante (ya que l y g son coordenadas angulares). Las variables de Delaunay permiten simplificar también el Hamiltoniano del problema de Kepler giratorio

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + yp_x - xp_y - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2L^2} - G.$$

Esta última expresión permite resolver en forma explícita las ecuaciones para el problema de Kepler giratorio

$$\dot{l} = \frac{\partial H_0}{\partial L} = L^{-3}, \quad \dot{L} = -\frac{\partial H_0}{\partial l} = 0,$$

$$\dot{g} = \frac{\partial H_0}{\partial G} = -1, \quad \dot{G} = -\frac{\partial H_0}{\partial g} = 0,$$

cuya solución es $L = L_0 = a^{1/2}$, $G = G_0 = \sqrt{a(1 - e^2)}$ son constantes y

$$l = L_0^{-3}t + l(0), \tag{2.19}$$

$$g = -t + g(0). \tag{2.20}$$

Las condiciones iniciales en términos de las nuevas variables son condiciones para un pase por el apocentro:

$$g(0) = -\pi, \quad l(0) = -\pi.$$

En un segundo cruce el tiempo es $t = T_{\text{sin}}/2$. El periodo en el sistema fijo es $T_{\text{sid}} = 2\pi L_0^3$, ya que el movimiento principal es $a^{-3/2} = L_0^{-3}$. La órbita será periódica también en el sistema rotatorio si $T_{\text{sin}} = pT_{\text{sid}} = 2\pi q$, ó $a^{3/2} = q/p$. Luego el paso por el pericentro ocurrirá al tiempo $t = \pi q$ y

$$l(\pi q) = \pi(1 + p), \quad g(\pi q) = -\pi(1 + q),$$

lo cual se sigue de la substitución de la condición inicial ($t = 0$) y las condiciones para el segundo cruce ($t = T_{\sin}/2$) en la solución de las ecuaciones de movimiento para $\mu = 0$.

El determinante del funcional $\partial(l, g)/\partial(t, L)$ en $t = T_{\sin}/2$, y $\mu = 0$ está dado por

$$\left| \frac{\partial(l, g)}{\partial(t, L)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial l}{\partial t} & \frac{\partial l}{\partial L_0} \\ \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial L_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_0^{-3} & -3L_0^{-4}T_{\sin} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3L_0^{-4}T_{\sin} \neq 0.$$

Entonces, aplicando el teorema de la función implícita podemos garantizar la existencia de una familia de órbitas periódicas parametrizadas por μ y el período. Esto demuestra la existencia de las órbitas de segunda especie.

Notemos que debemos evitar la colisión con el planetoide en $(1, 0)$. Para garantizar ésto, es suficiente por ejemplo si $a < 1$ en cuyo caso el asteroide es interior al planetoide o bien si la distancia mínima al centro atractor $a(1 - e) > 1$, en cuyo caso es exterior.

Apéndice **A**

Cálculo de órbitas de primera especie

Aquí consideramos las ecuaciones del *problema restringido circular de 3 cuerpos* en el sistema rotatorio en variables adimensionales.

Código en Mathematica

```
r1 = Sqrt[(x + mu)^2 + y^2];  
r2 = Sqrt[(x - 1 + mu)^2 + y^2];
```

```
Omega[x_,y_,mu_]=(1-mu) (\frac{r1^2}{2}+\frac{1}{r1});
```

```
niveles = ContourPlot[Evaluate[Omega[x,y,0.5],{x,-1.5,1.5},  
{y,-1.5,1.5}], PlotPoints -> 100, ColorFunction -> Hue ];
```

```
Plot3D[Evaluate[Omega[x,y,0.1]], {x,-1.5,1.5}, {y,-1.5,1.5},  
PlotPoints -> 30];
```

Búsqueda de una solución periódica

```
<<Graphics 'ImplicitPlot'
```

Graficamos ahora la frontera de una curva de nivel $\Omega = k$

```
k=2
```

```
nivel = ImplicitPlot[Omega[x,y,0.5]==k,{x,-2,2}, {y,-2,2},  
PlotRange -> {-1,1}, PlotPoints -> 100, ColorFunction -> Hue ]
```

Veamos si el origen está contenido en la región $\Omega \geq k$

```
TrueQ[Omega[0,0,0.5]>= k]
```

Ahora verifiquemos que si la región exterior pertenece a la región de Hill

```
TrueQ[Omega[2,0,0.5]>= k]
```

Veamos el rango de valores permitidos de x

```
FindRoot[Omega[x,0,0.5]==k,{x,0.7}]
```

```
sistema = { x'[t]==v[t], y'[t]==w[t],
```



```

v'[t]== 2w[t]+x[t]
-( (1-mu) \frac{x[t]+mu}{((x[t]+mu)^2+y[t]^2)^{3/2}} +
(1-mu) \frac{x[t]-1 +mu}{((x[t]-1 +mu)^2+y[t]^2)^{3/2}}),
w'[t]== -2v[t]+y[t]
-( (1-mu) \frac{(1-mu)y[t]}{((x[t]+mu)^2+y[t]^2)^{3/2}}
+(1-mu) \frac{y[t]mu}{((x[t]-1 +mu)^2+y[t]^2)^{3/2}})

```

El caso de masas iguales $\mu = 1/2=0.5$

```
mu=1/2;
```

Gráfica de una solución particular

```
x0=0.2;
```

```
inicial = {x[0]==x0,y[0]==0,v[0]==0,
w[0]==Evaluate[Sqrt{2 (Omega [x0,0,1/2]-k)}}];
```

```
sol = Flatten[NDSolve[Join[sistema, inicial],
{x[t],y[t],v[t],w[t]},{t,0,0.5}]];
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.sol],
{t,0,0.5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0,0,1]];
```

El tiempo en el que la solución cruza al eje y

```
ty=t/. FindRoot[(y[t]/. sol[[2]])==0,{t,0.3}]
```

La velocidad \dot{x} en el que la solución cruza al eje y

```
(v[t]/.sol[[3]])/.t -> ty
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.sol], {t,0,(t/. t -> ty)},
PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0,0,1]];
```

Definición de la función cuyos ceros dan órbitas periódicas

```
Clear[sol,ty,x0,v]
```

```

F[x0]:= Block [{sol,ty,xdot,inicial},
inicial = {x[0]==x0,y[0]==y0,v[0]==v0,
w[0]==Evaluate[Sqrt{2 (Omega [x0,0,1/2]-k)}}];
sol = Flatten[NDSolve[Join[sistema,inicial],{x[t],y[t],v[t],
w[t]},{t,0,1}]]];
ty = (t/.Findroot[(y[t]/.sol[[2]])==0,{t,0.5}]);
xdot = (v[t]/.sol[[3]])/.t -> ty;
Return[xdot];

```

Hagamos una prueba

```

F[0.4]
Table[{x0,F[x0]},{x0,0.1,0.4,0.1}]
ListPlot[% , PlotJoined -> True];
Table[{x0,F[x0]},{x0,0.337,0.339, 0.0001}];
ListPlot[% ,PlotJoined -> True];

```

La órbita periódica

```
x0=0.338;
inicial = {x[0]==x0,y[0]==0,v[0]==0,
  w[0]==Evaluate[Sqrt{2 (Omega [x0,0,1/2]-k)}}];
sol= Flatten[NDSolve[Join[sistema,inicial],
  {x[t],y[t],v[t],w[t]}, {t,0,1}]];

per = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/. sol] ,{t,0,1},
PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0,0,1],AspectRatio -> 1],

Show[nivel,per,PlotRange -> All]
```


Cálculo de órbitas de segunda especie

Aquí consideramos las ecuaciones del problema restringido circular de 3 cuerpos en el sistema rotatorio en variables adimensionales. Poincaré definió las órbitas periódicas de segunda especie a aquellas generadas a partir de órbitas elípticas de dos cuerpos en el plano de los primarios.

Código en Mathematica

```
r1 = Sqrt[(x + mu)^2 + y^2];
r2 = Sqrt[(x - 1 + mu)^2 + y^2];
```

```
Omega[x_,y_,mu_]=(1-mu) (\frac{r1^2}{2}+\frac{1}{r1});
```

```
niveles = ContourPlot[Evaluate[Omega[x,y,0.5]},{x,-1.5,1.5},
{y,-1.5,1.5}], PlotPoints -> 100, ColorFunction -> Hue ];
```

```
Plot3D[Evaluate[Omega[x,y,0.1]], {x,-1.5,1.5}, {y,-1.5,1.5},
PlotPoints -> 30];
```

Búsqueda de una solución periódica

```
<<Graphics'ImplicitPlot'
```

Graficamos ahora la frontera de una curva de nivel $\Omega = k$

```
k=2
```

```
nivel = ImplicitPlot[Omega[x,y,0.5]==k,{x,-2,2}, {y,-2,2},
PlotRange -> {-1,1}, PlotPoints -> 100, ColorFunction -> Hue ]
```

Veamos si el origen está contenido en la región $\Omega \geq k$

```
TrueQ[Omega[0,0,0.5] >= k]
```

Ahora verifiquemos que si la región exterior pertenece a la región de Hill

```
TrueQ[Omega[2,0,0.5] >= k]
```

Veamos el rango de valores permitidos de x

```
FindRoot[Omega[x,0,0.5]==k,{x,0.7}]
```

```
sistema = { x'[t]==v[t], y'[t]==w[t],
  v'[t] == 2w[t]+x[t] -(1-mu) \frac{x[t]+mu}{((x[t]+\mu)^2
    +y[t]^2)^{3/2}}+ (1- mu) \frac{x[t]-1 +\mu}{((x[t]-1 +\mu)^2
    +y[t]^2)^{3/2}}),
  w'[t]== -2v[t]+y[t]
  -(1-\mu) \frac{(1-\mu)y[t]}{((x[t]+\mu)^2+y[t]^2)^{3/2}}
  + (1-\mu) \frac{y[t]\mu}{((x[t]-1 +\mu)^2+y[t]^2)^{3/2}})}
```

El caso de masas iguales $\mu = 1/2$

```
mu=1/2;
```

Gráfica de una solución particular

```
x0=0.2;
```

```
inicial = {x[0]==x0,y[0]==0,v[0]==0,
w[0]==Evaluate[Sqrt{2 (Omega [x0,0,1/2]-k)}}];
```

```
sol = Flatten[NDSolve[Join[sistema, inicial],
{x[t],y[t],v[t],w[t]},{t,0,0.5}]];
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.sol], {t,0,0.5},
PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0,0,1]];
```

El tiempo en el que la solución cruza al eje y

```
ty=t/. FindRoot[(y[t]/.sol[[2]]==0,{t,0.5}]
```

La velocidad de x en el que la solución cruza al eje y

```
v[t]/. sol[[3]]/. t -> ty
```

```
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.sol], {t,0,(t/. t -> ty)},
PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0,0,1]];
```

Definición de la función cuyos ceros dan órbitas periódicas

```
Clear[sol,ty,x_0,v]
```

```
F[x_]:= Block [{sol,ty,xdot,inicial},
  inicial = {x[0]==x0,y[0]==y0,v[0]==v0,
  w[0]==Evaluate[Sqrt[2] (Omega [x0,0,1/2]-k)}}];
  sol = Flatten[NDSolve[Join[sistema,inicial],
  {x[t],y[t],v[t],w[t]},{t,0,1}]]];
  ty = (t/.Findroot[(y[t]/.sol[[2]]==0,{t,0.5}));
  xdot = (v[t]/.sol[[3]])/.t\arrow ty;
  Return[xdot]];
```

Hagamos una prueba

```
F[0.4]
Table[{x0,F[x0]},{x_0,0.1,0.4,0.1}];
ListPlot[% , PlotJoined -> True];
Table[{x0,F[x0]},{x0,0.337,0.339, 0.0001}];
ListPlot[% ,PlotJoined -> True];
```

La órbita periódica

```
x0=0.6975
inicial = x[0]==x0,y[0]==0,v[0]==0,
w[0]==Evaluate[Sqrt[2] (Omega [x_0,0,1/2]-k)]];
sol= Flatten[NDSolve[Join[sistema,inicial],
{x[t],y[t],v[t],w[t]}, {t,0,1}]]

per = ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/. sol],{t,0,1},
PlotRange -> All, PlotStyle -> RGBColor[0,0,1],AspectRatio -> 1],

Show[nivel,per,PlotRange -> All]
```


Bibliografía

- [1] A. Abraham y J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings, USA, 1979.
- [2] P. Armendáriz, E. A. Lacomba y F. Peredo, *Notas de Mecánica Celeste*, UAM-Iztapalapa, México, 1978.
- [3] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag, USA, 1978.
- [4] J. Delgado y L.V. Vela, *El problema restringido plano y circular de tres cuerpos*, Reporte de Investigación UAM, México, 1993.
- [5] H. Poincaré, *Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action*, C.R.A.S. 1896, t. 123, pp. 915--918; in *Oeuvres*, tome VII.
- [6] H. Poincaré, *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, vol 1 pág. 82, Francia, 1987.
- [7] H. Pollard, *Qualitative methods in the n-body problem*, Space Mathematics (Proc. Summer Seminar, Ithaca, N.Y., 1963), Part 1 pp. 259--291 Amer. Math. Soc., USA, 1966.
- [8] H. Pollard, *A mathematical introduction to celestial mechanics*, Prentice Hall, USA, 1967.
- [9] H. Pollard, *Applied Mathematics: An Introduction*. Addison-Wesley, USA, 1972.
- [10] E. L. Stiefel, y G. Scheifele. *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, USA, 1971.
- [11] V. Szebehely, *Theory of Orbits*, Academic Press, USA, 1967.